46　種々の数列

381

第 k 項 $(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$ は $2k\{2n-(2k-1)\}$，すなわち，$-4k^2+2(2n+1)k$ と表される。

よって，

$$与式=\sum_{k=1}^{n}\left\{-4k^2+2(2n+1)k\right\}$$

$$=-4\sum_{k=1}^{n}k^2+2(2n+1)\sum_{k=1}^{n}k$$

$$=-4\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+2(2n+1)\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{3}$$

382

(1)

分母が同じものを 1 つの群として扱うと，

第 k 群 $(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ は初項 $\dfrac{1}{k+1}$，公差 $\dfrac{1}{k+1}$，項数 k の等差数列である。

したがって，$\dfrac{37}{50}$ は第 49 群の 37 番目の項にあたる。

また，第 1 群から第 48 群までの項数は $\displaystyle\sum_{k=1}^{48}k=\frac{48(48+1)}{2}=1176$

よって，$\dfrac{37}{50}$ は与えられた数列の $1176+37=1213$ 番目の項，すなわち第 1213 項である。

(2)

第 1000 項が第 n 群に含まれるとすると，

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}k<1000\leq\sum_{k=1}^{n}k$　すなわち　$\dfrac{n(n-1)}{2}<1000\leq\dfrac{n(n+1)}{2}$ より，$n(n-1)<2000\leq n(n+1)$

$x^2=2000\ (x>0)$ とすると，$x=20\sqrt{5}\approx 45$ だから，

$n=45$ とすると，$n(n-1)=1980$，$n(n+1)=2070$ より，$n(n-1)<2000\leq n(n+1)$ を満たす。

よって，第 1000 項は第 45 群に含まれる。

これと，第 44 群までの項数 $\displaystyle=\sum_{k=1}^{44}k=\frac{44(44+1)}{2}=990$ より，

第 1000 項は第 45 群の $1000-990=10$ 番目の数である。

よって，その数は $\dfrac{10}{46}$

(3)

第 k 群に含まれる数の和は

$$\frac{1}{k+1}+\frac{2}{k+1}+\frac{3}{k+1}+\cdots+\frac{k}{k+1}=\frac{1}{k+1}(1+2+3+\cdots+k)$$
$$=\frac{1}{k+1}\cdot\frac{k(k+1)}{2}=\frac{k}{2}$$

よって，第 44 群までの数の総和は $\displaystyle\sum_{k=1}^{44}\frac{k}{2}=\frac{44(44+1)}{4}=495$

また，第 45 群の最初から 10 番目の数の和は $\dfrac{1+2+3+\cdots+10}{46}=\dfrac{55}{46}$

よって， $495+\dfrac{55}{46}=\dfrac{22825}{46}$

383

$$\sum_{j=1}^{n} j^2 2^{n-j}=2^n\sum_{j=1}^{n}\frac{j^2}{2^j}$$

$S_n=\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{j^2}{2^j}$ とおくと， $S_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2^2}{2^2}+\dfrac{3^2}{2^3}+\cdots+\dfrac{n^2}{2^n}$ ・・・①

①より， $\dfrac{1}{2}S_n=\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{2^2}{2^3}+\dfrac{3^2}{2^4}+\cdots+\dfrac{(n-1)^2}{2^n}+\dfrac{n^2}{2^{n+1}}$ ・・・②

①－②より， $\dfrac{S_n}{2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{5}{2^3}+\cdots+\dfrac{2n-1}{2^n}-\dfrac{n^2}{2^{n+1}}$ ・・・③

③より， $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{S_n}{2}=\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{3}{2^3}+\dfrac{5}{2^4}+\cdots+\dfrac{2n-3}{2^n}+\dfrac{2n-1}{2^{n+1}}-\dfrac{n^2}{2^{n+2}}$ ・・・④

③－④より，

$$\frac{S_n}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{n^2+2n-1}{2^{n+1}}+\frac{n^2}{2^{n+2}}$$
$$=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\frac{1}{2}-\frac{n^2+4n-2}{2^{n+2}}$$
$$=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}-\frac{n^2+4n-2}{2^{n+2}}$$
$$=2\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}-\frac{1}{2}-\frac{n^2+4n-2}{2^{n+2}}$$
$$=\frac{3}{2}-\frac{n^2+4n+6}{2^{n+2}}$$

よって，$S_n = 6 - \dfrac{n^2 + 4n + 6}{2^n}$

ゆえに，

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} j^2 2^{n-j} &= 2^n \sum_{j=1}^{n} \frac{j^2}{2^j} \\ &= 2^n S_n \\ &= 2^n \left(6 - \frac{n^2 + 4n + 6}{2^n}\right) \\ &= 3 \cdot 2^{n+1} - n^2 - 4n - 6\end{aligned}$$

384

(1)

$a_1 = S_1 = 24$

$n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned}a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n - \left\{(n-1)^4 + 6(n-1)^3 + 11(n-1)^2 + 6(n-1)\right\} \\ &= n^4 - (n-1)^4 + 6\left\{n^3 - (n-1)^3\right\} + 11\left\{n^2 - (n-1)^2\right\} + 6\{n - (n-1)\} \\ &= 4n^3 + 12n^2 + 8n \\ &= 4n(n+1)(n+2)\end{aligned}$$

$4n(n+1)(n+2)$ に $n=1$ を代入すると，$4 \cdot 1 \cdot (1+1) \cdot (1+2) = 24$ となり，a_1 と一致する。

よって，$a_n = 4n(n+1)(n+2)$ は $n=1$ のときも成り立つ。

ゆえに，題意が成り立つ。

(2)

$$\begin{aligned}T_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{1}{8} \sum_{k=1}^{n} \left\{\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right\} \\ &= \frac{1}{8}\left[\left(\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3}\right) + \left(\frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 4}\right) + \left(\frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{4 \cdot 5}\right) + \cdots + \left\{\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}\right] \\ &= \frac{1}{8}\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\} \\ &= \frac{n(n+3)}{16(n+1)(n+2)}\end{aligned}$$

補足

$\dfrac{1}{4k(k+1)(k+2)}=\dfrac{A}{k(k+1)}+\dfrac{B}{(k+1)(k+2)}$ とおき，両辺を $4k(k+1)(k+2)$ 倍すると，

$1=4A(k+2)+4Bk$ より，$4(A+B)k+8A-1=0$

これが任意の自然数 k で成り立つから，$A+B=0$ かつ $8A-1=0$ より，　$A=\dfrac{1}{8},\ B=-\dfrac{1}{8}$

ゆえに，$\dfrac{1}{4k(k+1)(k+2)}=\dfrac{1}{8}\left\{\dfrac{1}{k(k+1)}-\dfrac{1}{(k+1)(k+2)}\right\}$

385

(1)

$a_1=1,\ a_2=2,\ a_3=4,\ a_4=5,\ a_5=7,\ a_6=8,\ a_7=10,\ a_8=11,\ \cdots$ より，

奇数番目の項は初項 1，公差 3 の，偶数番目の項は初項 2，公差 3 の等差数列である。

よって，$a_{2m-1}=1+3(m-1)=3m-1$，$a_{2m}=2+3(m-1)=3m-2$　$\therefore a_{2m}=3m-1$

(2)

(1)より，$a_{2m}=3m-1$，$a_{2m-1}=3m-2$

(i) $n=2m$ のとき

$$\begin{aligned}S_n&=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}+a_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2m}+a_{2m}\\&=a_1+a_3+\cdots+a_{2m-1}+a_2+a_4+\cdots a_{2m}\\&=\frac{a_1+a_{2m-1}}{2}\cdot m+\frac{a_2+a_{2m}}{2}\cdot m\\&=\frac{1+3m-2}{2}\cdot m+\frac{2+3m-1}{2}\cdot m\\&=3m^2\end{aligned}$$

これと $m=\dfrac{n}{2}$ より，$S_n=\dfrac{3}{4}n^2$

(ii) $n=2m-1$ のとき

$$\begin{aligned}S_n&=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n\\&=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2m-1}\\&=\left(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2(m-1)}+a_{2m-1}+a_{2m}\right)-a_{2m}\end{aligned}$$

(i)より $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2m}+a_{2m}=3m^2$ だから，

$\left(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2(m-1)}+a_{2m-1}+a_{2m}\right)-a_{2m}=3m^2-3m+1$

これと $m=\dfrac{n+1}{2}$ より，$S_n=3\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^2-3\cdot\dfrac{n+1}{2}+1=\dfrac{3}{4}n^2+\dfrac{1}{4}$

(i)，(ii)より，

n が偶数ならば $S_n=\dfrac{3}{4}n^2$，n が奇数ならば $S_n=\dfrac{3}{4}n^2+\dfrac{1}{4}$

(3)

(i) n が偶数のとき

$S_n=\dfrac{3}{4}n^2\geq 600$ より，$n^2\geq 800$

これと $28^2<800<29^2$ より，最小の正の偶数は 30

(ii) n が奇数のとき

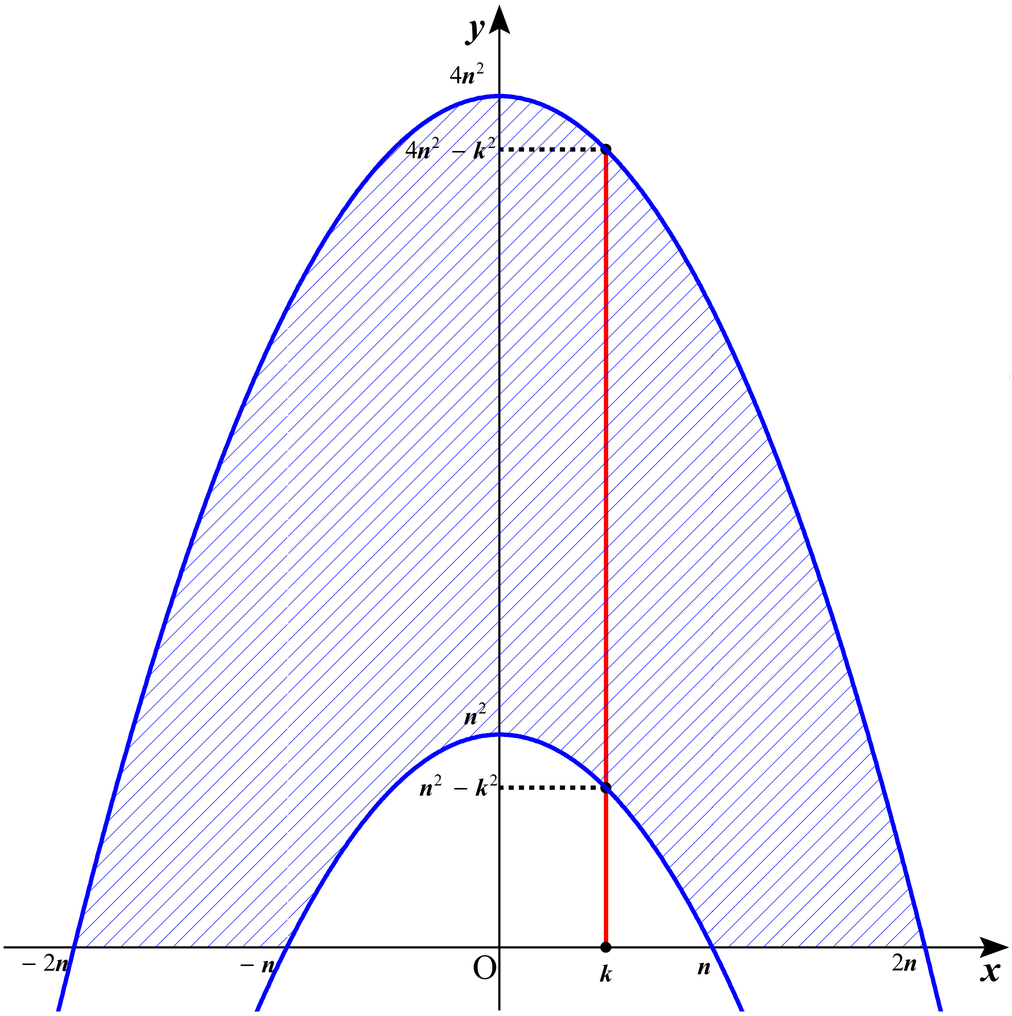
$S_n=\dfrac{3}{4}n^2+\dfrac{1}{4}\geq 600$ より，$n^2\geq 800-\dfrac{1}{3}$

これと $27^2<800-\dfrac{1}{3}<29^2$ より，最小の正の奇数は 29

(i)，(ii)より，$S_n\geq 600$ となる最小の正の整数は 29

386

$0\leq y\leq 4n^2-x^2$ の格子点の個数を S_n，$0\leq y<n^2-x^2$ の格子点の個数を T_n とすると，
求める格子点の個数は S_n-T_n



S_n について

y 軸上（$x=0$）の格子点の個数は $4n^2+1$

$x=k$ （$k=1, 2, \cdots, 2n$）上の格子点の個数は $4n^2-k^2+1$

これと，$y=4n^2-x^2$ が y 軸に関して対称であることから，

$$S_n=4n^2+1+2\sum_{k=1}^{2n}\left(4n^2-k^2+1\right)$$

T_n について

y 軸上（$x=0$）の格子点の数は n^2

$x=k$ （$k=1, 2, \cdots, n$）上の格子点の個数は $a_k=n^2-k^2$

これと，$y=n^2-x^2$ が y 軸に関して対称であることから，

$$T_n=n^2+2\sum_{k=1}^{n}\left(n^2-k^2\right)$$

よって，

$$\begin{aligned}
S_n-T_n&=4n^2+1+2\sum_{k=1}^{2n}\left(4n^2-k^2+1\right)-\left\{n^2+2\sum_{k=1}^{n}\left(n^2-k^2\right)\right\}\\
&=3n^2+1+2\left\{\sum_{k=1}^{n}\left(4n^2-k^2+1\right)-\sum_{k=1}^{n}\left(n^2-k^2\right)+\sum_{k=n+1}^{2n}\left(4n^2-k^2+1\right)\right\}\\
&=3n^2+1+2\sum_{k=1}^{n}\left(3n^2+1\right)+2\left\{\sum_{k=n+1}^{2n}\left(4n^2+1\right)-\sum_{k=n+1}^{2n}k^2\right\}\\
&=3n^2+1+2n\left(3n^2+1\right)+2n\left(4n^2+1\right)-2\left(\sum_{k=1}^{2n}k^2-\sum_{k=1}^{n}k^2\right)\\
&=14n^3+3n^2+4n+1-2\cdot\left\{\frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right\}\\
&=14n^3+3n^2+4n+1-\frac{n(2n+1)(7n+1)}{3}\\
&=\frac{28n^3+11n+3}{3}
\end{aligned}$$

387

(i) $n=1$ のとき

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(k+1)(k+2)}{3^{k-1}}a_k=-\frac{1}{4}(2n+1)(2n+3)=-\frac{15}{4}$$ より，

$$\sum_{k=1}^{1}\frac{(k+1)(k+2)}{3^{k-1}}a_k=-\frac{1}{4}(2\cdot1+1)(2\cdot1+3)=-\frac{15}{4}$$

また，$\displaystyle\sum_{k=1}^{1}\frac{(k+1)(k+2)}{3^{k-1}}a_k=\frac{(1+1)(1+2)}{3^{1-1}}a_1=6a_1$

よって，$6a_1=-\dfrac{15}{4}$　$\therefore a_1=-\dfrac{5}{8}$

(ii) $n\geq 2$ のとき

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(k+1)(k+2)}{3^{k-1}}a_k=-\frac{1}{4}(2n+1)(2n+3)\quad\cdots①$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(k+1)(k+2)}{3^{k-1}}a_k=-\frac{1}{4}(2n-1)(2n+1)\quad\cdots②$$

①－②より，

$$a_n\sum_{k=1}^{n}\frac{(k+1)(k+2)}{3^{k-1}}a_k-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(k+1)(k+2)}{3^{k-1}}a_k=-\frac{1}{4}(2n+1)(2n+3)+\frac{1}{4}(2n-1)(2n+1)$$
$$=-(2n+1)$$

また，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(k+1)(k+2)}{3^{k-1}}a_k-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(k+1)(k+2)}{3^{k-1}}a_k=\frac{(n+1)(n+2)}{3^{n-1}}a_n$

よって，$\dfrac{(n+1)(n+2)}{3^{n-1}}a_n=-(2n+1)$ より，$a_n=-\dfrac{3^{n-1}(2n+1)}{(n+1)(n+2)}$

(i)，(ii)より，$a_1=-\dfrac{5}{8}$，$a_n=-\dfrac{3^{n-1}(2n+1)}{(n+1)(n+2)}$　$(n=2,\ 3,\ \cdots)$

388

(1)

$1 \leq \sqrt{1} < 2$，$1 \leq \sqrt{2} < 2$，$1 \leq \sqrt{3} < 2$，$\sqrt{4} = 2$ より，

$a_1 = a_2 = a_3 = 1$，$a_4 = 2$

(2)

$a_n = k$ のとき，$k \leq \sqrt{n} < k+1$

よって，$k^2 \leq n < (k+1)^2$　すなわち $k^2 \leq n \leq (k+1)^2 - 1$

したがって，$a_n = k$ である項の個数は $(k+1)^2 - 1 - k^2 + 1 = 2k+1$

よって，$a_n = k$ である各項の和をとると，$k(2k+1)$

ゆえに，

$$
\begin{aligned}
S &= a_1 + a_2 + \cdots + a_{m^2} \\
&= \left(a_1 + a_2 + \cdots + a_{m^2-1}\right) + a_{m^2} \\
&= \sum_{k=1}^{m-1} k(2k+1) + m \\
&= \frac{2(m-1)\cdot m \cdot (2m-1)}{6} + \frac{m(m-1)}{2} + m \\
&= \frac{m\left(4m^2 - 3m + 5\right)}{6}
\end{aligned}
$$

389

(1)

x 座標の値と y 座標の値がいずれも整数であるような点を格子点と呼ぶことにする。

解法 1

$\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} = k\ (x \geq 0,\ y \geq 0)$ を対角線とする長方形 OABC の頂点を次図のようにとると，

a_k は△OAC の周を含む内部の格子点の個数である。

そこで，a_k を，以下の手順を経て，k の式で表してみる。

対角線 AC の中点を $\mathrm{M}\left(\dfrac{3}{2}k,\ k\right)$，点 M を通る直線と長方形 OABC の辺との交点のうち，

対角線 AC より上側の交点を D，下側の交点を E とすると，

△MCD≡△MAE（証明略）より，MD＝ME

よって，点 M に関して対称な関係にある MD 上の点と ME 上の点は 1 対 1 に対応する。

また，MD 上の格子点を $(x_i,\ y_i)$，$(x_i,\ y_i)$ と点 M に関して対称な点を $(x_j,\ y_j)$ とすると，

$\left(\dfrac{x_i + x_j}{2},\ \dfrac{y_i + y_j}{2}\right) = \left(\dfrac{3}{2}k,\ k\right)$ より，$(x_j,\ y_j) = (3k - x_i,\ 2k - y_i)$

$3k - x_i$ と $2k - y_i$ は整数だから，$(x_j,\ y_j)$ は格子点である。

したがって，MD 上の格子点と ME 上の格子点が 1 対 1 に対応する。
これと，点 M を通る直線群は長方形 OABC の周および内部のすべての点を通ることから，長方形 OABC の周を含む内部の格子点で，対角線 AC より上側の格子点の個数と下側の格子点の個数は等しい。
よって，長方形 OABC の周を含む内部の格子点の個数を b_k，対角線 AC 上の格子点の個数を c_k とすると， $a_k = \dfrac{b_k - c_k}{2} + c_k$ より， $a_k = \dfrac{b_k + c_k}{2}$ ・・・①

b_k について

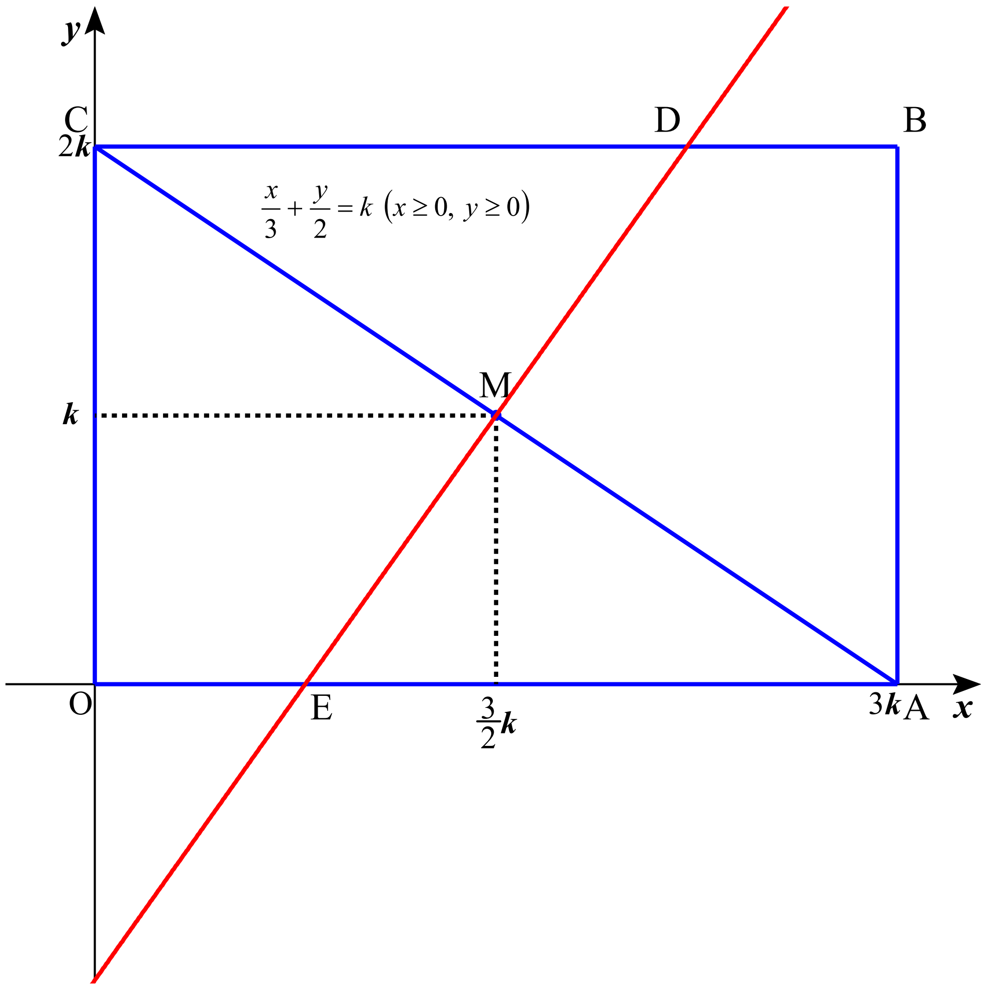
$b_k = (2k+1)(3k+1)$ ・・・②

c_k について

対角線 AC の方程式は $\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} = k \ (x \geq 0,\ y \geq 0)$ すなわち $y = 2k - \dfrac{2}{3}x \ (x \geq 0,\ y \geq 0)$ だから，

格子点は $(0,\ 2k),\ (3,\ 2k-2),\ \cdots,\ (3k,\ 0)$ $\therefore c_k = k+1$ ・・・③

②と③を①に代入し，整理することにより， $a_k = 3k^2 + 3k + 1$



解法 2

$\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}=k\ (x\geq 0,\ y\geq 0)$ より，$x=3k-\dfrac{3}{2}y\ (x\geq 0,\ y\geq 0)$

よって，次図斜線部（境界線を含む）の格子点の個数が a_k である。

$m=1,\ 2,\ \cdots,\ k$ とすると，

$y=2m$ 上の格子点の個数

$0\leq x\leq 3k-3m$ を満たす整数 x の個数格子点の個数が格子点の個数となるから，

その個数は $3k-3m+1$

$y=2m-1$ 上の格子点の個数

$0\leq x\leq 3k-3m+\dfrac{3}{2}=3k-3m+1+\dfrac{1}{2}$ を満たす整数 x の個数が格子点の個数となるから，

その個数は $3k-3m+2$

また，$y=0$ 上の格子点の個数は $3k+1$

よって，

$$
\begin{aligned}
a_k&=\sum_{m=1}^{k}(3k-3m+1)+\sum_{m=1}^{k}(3k-3m+2)+3k+1\\
&=\sum_{m=1}^{k}\{3(2k+1)-6m\}+3k+1\\
&=3k(2k+1)-6\cdot\frac{k(k+1)}{2}+3k+1\\
&=3k^2+3k+1
\end{aligned}
$$

補足

$y=2k-\dfrac{2}{3}x\ (x\geq 0,\ y\geq 0)$ から求める場合

$m=1,\ 2,\ \cdots,\ k$ とすると，

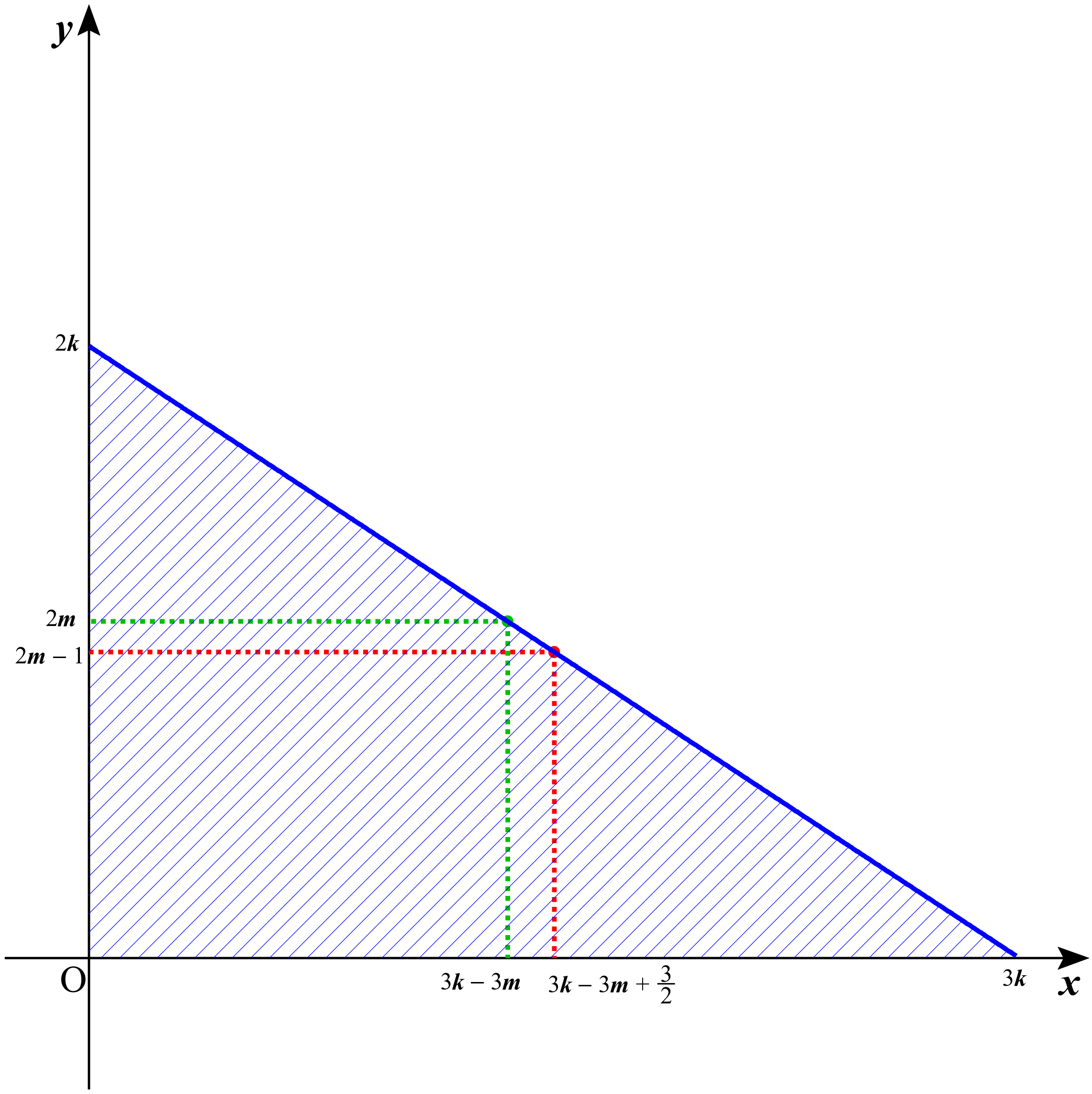
$x=3m-2$ 上の格子点の個数は，$0\leq y\leq 2k-2m+\dfrac{4}{3}$ より，$2k-2m+2$

$x=3m-1$ 上の格子点の個数は，$0\leq y\leq 2k-2m+\dfrac{2}{3}$ より，$2k-2m+1$

$x=3m$ 上の格子点の個数は，$0\leq y\leq 2k-2m$ より，$2k-2m+1$

これと，$x=0$ 上の格子点の個数が $2k+1$ であることから，

$$
\begin{aligned}
a_k&=\sum_{m=1}^{k}(2k-2m+2)+2\sum_{m=1}^{k}(2k-2m+1)+2k+1\\
&=\sum_{m=1}^{k}\{(6k+4)-6m\}+2k+1\\
&=3k^2+3k+1
\end{aligned}
$$



(2)

条件より，平面 $z=l$ $(l=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 上の格子点は，$\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}+l\leq n$ $(x\geq 0,\ y\geq 0)$ を満たすが，

その個数は xy 平面において $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}\leq n-l$ $(x\geq 0,\ y\geq 0)$ を満たす格子点の個数と等しい。

また，(1)より，$\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}\leq k$ $(x\geq 0,\ y\geq 0)$ を満たす格子点の個数は $3k^2+3k+1$ である。

よって，平面 $z=l$ $(l=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 上にあり，条件を満たす格子点の個数は

$3(n-l)^2+3(n-l)+1=3l^2-3(2n+1)l+3n^2+3n+1$

ゆえに,

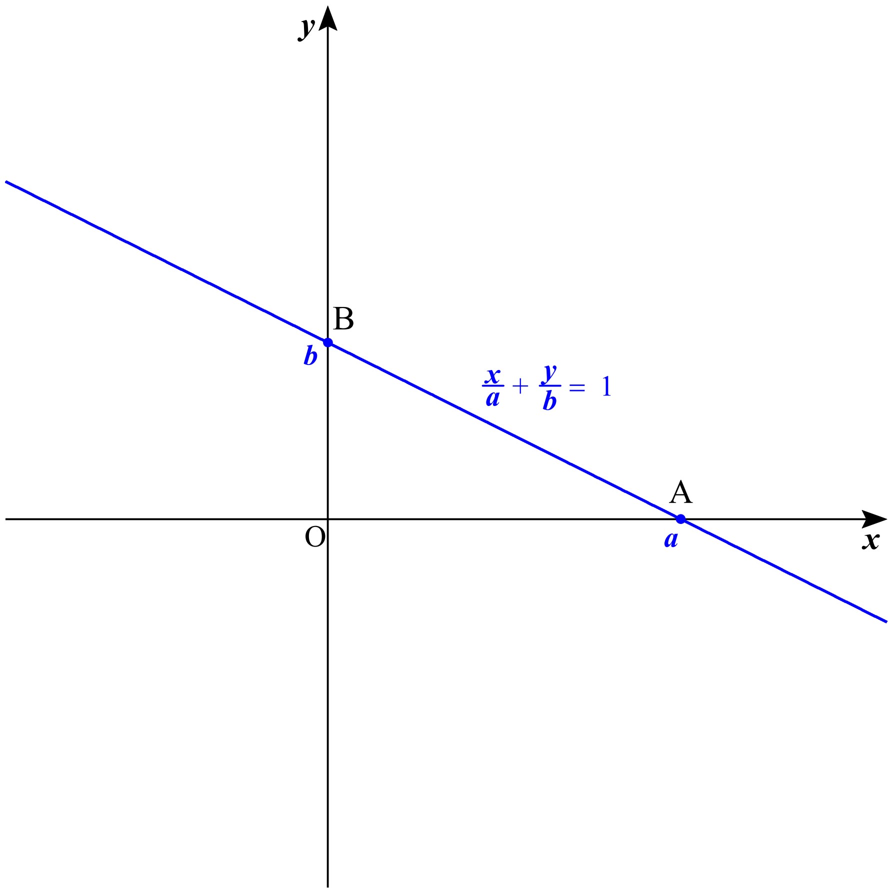
$$b_n=\sum_{l=0}^{n}\left\{3l^2-3(2n+1)l+3n^2+3n+1\right\}$$
$$=3n^2+3n+1+\sum_{l=1}^{n}\left\{3l^2-3(2n+1)l+3n^2+3n+1\right\}$$
$$=3n^2+3n+1+3\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-3(2n+1)\cdot\frac{n(n+1)}{2}+n\left(3n^2+3n+1\right)$$
$$=n^3+3n^2+3n+1$$
$$=(n+1)^3$$

参考

切片方程式

x 切片を a, y 切片を b とする直線の方程式

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ （a,b は 0 でない実数）



証明

A$(a,0)$, B$(0.b)$を通る直線の方程式は, $y=-\frac{b}{a}x+b$ $\therefore \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

390

$\displaystyle\sum_{k=1}^{l} a_k \leq 1$ の証明

はじめて $a_k = 0$ となる k が $1 \leq k \leq l+1$ において存在するとき，$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq 0$ より，

$a_{l+1} = a_{l+2} = \cdots = a_n = 0$

これと $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = 1$ より，$\displaystyle\sum_{k=1}^{l} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k = 1$ ・・・①

はじめて $a_k = 0$ となる k が $l+2 \leq k \leq n$ において存在するか $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n > 0$ のとき

$\displaystyle\sum_{k=1}^{l} a_k < \sum_{k=1}^{n} a_k = 1$ ・・・②

よって，①，②より，$\displaystyle\sum_{k=1}^{l} a_k \leq 1$

$\displaystyle\frac{l}{n} \leq \sum_{k=1}^{l} a_k$ の証明

間接証明：背理法

$\displaystyle\sum_{k=1}^{l} a_k < \frac{l}{n}$ と仮定する

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = 1$ より，$\displaystyle\sum_{k=1}^{l} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=l+1}^{n} a_k = 1 - \sum_{k=l+1}^{n} a_k$

したがって，$\displaystyle 1 - \sum_{k=l+1}^{n} a_k < \frac{l}{n}$ すなわち $\displaystyle\sum_{k=l+1}^{n} a_k > 1 - \frac{l}{n} = \frac{n-l}{n}$

また，$a_l \geq a_{l+1} \geq \cdots \geq a_n \geq 0$ より，$\displaystyle\sum_{k=l+1}^{n} a_k \leq \{n-(l+1)+1\}a_l = (n-l)a_l$

よって，$\displaystyle (n-l)a_l > \frac{n-l}{n}$ すなわち $\displaystyle a_l > \frac{1}{n}$

ゆえに，$\displaystyle\sum_{k=1}^{l} a_k \geq l\,a_l > \frac{l}{n}$ すなわち $\displaystyle\sum_{k=1}^{l} a_k > \frac{l}{n}$

これは仮定すなわち $\displaystyle\sum_{k=1}^{l} a_k < \frac{l}{n}$ と矛盾する。

よって，背理法により，$\displaystyle\frac{l}{n} \leq \sum_{k=1}^{l} a_k$

直接証明

$\sum_{k=1}^{n} a_k = 1$ より，

$$\sum_{k=1}^{l} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=l+1}^{n} a_k$$
$$= 1 - \sum_{k=l+1}^{n} a_k$$

ここで，$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_l \geq a_{l+1} \geq \cdots \geq a_n \geq 0$ より，

$\sum_{k=l+1}^{n} a_k \leq (n-l)a_l \leq \cdots \leq (n-l)a_1$ すなわち $-\sum_{k=l+1}^{n} a_k \geq -(n-l)a_l \geq \cdots \geq -(n-l)a_1$

よって，$\sum_{k=1}^{l} a_k \geq 1-(n-l)a_l \geq \cdots \geq 1-(n-l)a_1$ より，

$$l\sum_{k=1}^{l} a_k \geq \{1-(n-l)a_1\} + \{1-(n-l)a_2\} + \cdots + \{1-(n-l)a_l\}$$

すなわち $l\sum_{k=1}^{l} a_k \geq l-(n-l)\sum_{k=1}^{l} a_k$ 　$\therefore \dfrac{l}{n} \leq \sum_{k=1}^{l} a_k$